Metafísica y Matemáticas

Julio Moreno Dávila

Il libro della natura è scritto nel linguaggio della matematica.
Galileo Galilei

Lo esencial para la consciencia humana no es la sustancia, sino la relación.
Santo Tomás de Aquino, citado por Raimón Panikkar

Los maestros… enseñan… que los seres son de diez modos. El primer modo sería el que contiene más ser… y el último, el que contiene menos ser, se denomina relación. Este último, en Dios, es idéntico al más elevado de todos…
Meister Eckart: Sermo "Quasi stella matutina in medio næbulæ".

There is no mathematical substitute for philosophy.
Aaron Kripke.

Un grand merci au P. Alain Contat
Sans ses questions critiques, ce travail n'aurait pas pu été parachevé.

De pequeño, el cálculo mental y escrito me causaron muchos problemas en la escuela. Y no sólo porque me resultara muy difícil, sino por la crispación que me producían. A la clásica pregunta "¿Qué quieres ser de mayor?" yo respondía invariablemente "Nada que tenga que ver con las matemáticas". Hoy día, gozo indescriptiblemente con la contemplación estética de las estructuras, verdaderamente arquitecturales, que forman las relaciones entre objetos matemáticos.

1. Ya David Hilbert, en su libro *Grundlagen der Geometrie* (1899), nos hizo ver como implícitamente la **geometría** euclídea (y con ella todas aquellas que se desarrollan por el método axiomático-deductivo, es decir la práctica totalidad desde Euclides hasta hoy) **se construye** sobre una serie de **entes**, geométricos en este caso, puntos, rectas, círculos, poliedros… más un cierto número de **relaciones** entre ellos (intersectar, contener, ser externo o interno, estar – entre, ser paralelo etc.). Naturalmente, esta afirmación del genio matemático a caballo entre dos siglos, estaba limitada al ámbito geométrico y contiene una lista relativamente extensa de objetos (o conceptos de objetos, volveremos sobre este tema) inadecuada por su longitud, para constituir una síntesis metafísica al nivel de los géneros supremos del ente, es decir a las categorías aristotélicas (o kantianas), lo que le impide tener una validez universal.

En este ensayo, nos proponemos mostrar que, al aplicar a una ciencia una teoría matemática, estamos implícitamente aceptando una ontología cuya tabla de ***categorías****, de géneros supremos del ente (que en Aristóteles contiene 8 o 10 entradas según las versiones), contiene exclusivamente* ***dos*** *elementos:* ***sustancia*** (ουσία) *y* ***relación*** (προσ τί).

2. Para mostrarlo, empezaremos por hacer ver la tabla de categorías aristotélicas **implícita** en toda teoría matemática, y para ello, habrá que decir dos palabras a propósito de los fundamentos formales de esta ciencia. Para hacerlo, basta con estudiar el caso de la aritmética (técnicamente llamada teoría de los números), pues que las otras disciplinas matemáticas están basadas en ella, de tal modo que, si mostramos como la aritmética está construida en última instancia sobre las dos categorías antedichas, el resto de la matemática tendrá su origen **último** en estas dos categorías. Fue Richard Dedekind el que aritmetizó el análisis matemático y el álgebra en 1834[1]. Por su parte, y como es bien sabido, René Descartes había ya reducido la esencia de la geometría a la del álgebra.

Como corolario, si uno describe **de forma completa** un aspecto o una parte del mundo usando una ciencia cualquiera (física por ejemplo) basada en una descripción matemática, habremos mostrado como

[1] R. DEDEKIND, *Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik.*

dicha descripción del mundo se reduce en última instancia a esas dos categorías.

3. En la fundamentación "clásica"[2] de la aritmética se utiliza la teoría de conjuntos. En dicha teoría, se utilizan como elementos de base (análogos a los puntos y la líneas de la geometría) dos elementos de partida (sin definición, pues), **conjunto y elemento del conjunto** y una relación, la de **pertenencia**. El concepto de conjunto es fundamentalmente universal, estudiando la teoría de "conjuntos" se encuentra que no siempre son objetos que corresponden a este concepto intuitivo ingenuo. Sin embargo, las relaciones y las operaciones con conjuntos estaban basadas en consideraciones que hacían intervenir a los miembros de los conjuntos, que se hacían así elementos esenciales de la teoría. Ello representa una imperfección al tener dos tipos de objetos de partida. Un perfeccionamiento (desde el punto de vista metafísico) fue exigir que los conjuntos no lo fueran sólo de **urelementos**[3], es decir, se exige que los conjuntos contengan solamente otros conjuntos. De este modo, aunque esta exigencia es metafísicamente limitativa, reducimos a uno solo los elementos de base (categorías aristotélicas). El lector podría pensar que la utilización única de conjuntos y sus relaciones nos llevaría a un regreso al infinito. Aparentemente, si los únicos miembros de un conjunto son… otros conjuntos (no se admiten urelementos) ¿dónde detenerse? La solución viene del hecho de que el punto de partida es el conjunto vacío, designado con la letra danesa Ø que, al no contener elemento alguno, no contiene evidentemente elementos espúreos pues que no contiene ninguno. El siguiente paso estará constituido por un conjunto cuyo miembro será el conjunto vacío Ø, etc. (no es lo mismo el conjunto vacío Ø que el conjunto cuyo elemento es el conjunto vacío).

4. Con la introducción (por Eilenberg y McLane, 1945) del concepto de categoría matemática (nombre que crea un problema terminológico al referirse a algo totalmente distinto de las categorías aristotélicas o kantianas) los elementos de base sobre los que se edifica la

[2] Cantor, 1873, en una carta a Dedekind; Ernst Zermelo 1908, Abraham Fränkel, 1922

[3] Véase: M. ELLIOT, *Introduction to Mathematical Logic*, 4th ed. London: 1997, Chapman & Hall 297–304.

teoría se reducen a dos: **objetos** y **morfismos**. El concepto de objeto es una generalización del concepto de conjunto y el concepto de morfismo es simplemente una relación (de tipo particular) entre objetos. Absolutamente todo es un objeto en una categoría matemática, basta que sea posible individuarlo e identificarlo, lo que corresponde bien al concepto de sustancia[4] (esta afirmación será justificada más abajo en el punto 8). En la definición de Eilenberg & MacLane se habla de "agregados"[5] (evidentemente se evita el uso de la palabra "conjunto") pero, como dicen estos dos autores, los "objetos" agregados no juegan un papel esencial y, formalmente podrían eliminarse de las definiciones, si bien ello complicaría el formalismo.

Puesto que "todo" es un objeto, resulta que **los morfismos son también "objetos"**, concepto que, para un matemático, no tiene nada de particular, acostumbrados como están a estudiar tantas transformaciones o relaciones (morfismos) como elementos **primarios** de estudio, lo que implica estudiar las relaciones de relaciones. En el mismo lenguaje ordinario, al decir que la paternidad es lo inverso de la filiación, estamos tratando dos relaciones (paternidad y filiación) como elementos primarios y una relación (inversión) que las conecta.

Originariamente, los esfuerzos formales que llevaron a Samuel Eilenberg y Saunders McLane, a descubrir la teoría de las categorías matemáticas, tenían como objetivo el estudiar los morfismos (relaciones) entre objetos, tales que **la estructura** de los objetos mismos **se viera fielmente representada** en la estructura del objeto relacionado[6]. Tales objetos se denominan hoy *functores* (*function objects*). De esta forma, al estudiar un objeto matemático (el número entero con sus relaciones estructurales aditivas y smultiplicativas, por ejemplo) los resultados de este estudio se pueden aplicar a otro dominio de objetos por medio de functores. En definitiva, aún sin nombrarlo habitualmente, la teoría de las categorías nos conduce a un **estructuralismo matemático** en el que lo fundamental de los objetos (lo que los define e identifica) son las relaciones entre sí y con otros objetos (internas y

---

[4] F. SOLER GIL: Aristóteles en el mundo Cuántico, p. 68.

[5] Véase: S. FRENCH, Stanford Encyclopedia of Philosophy, I*dentity and Individuality in Quantum Theory*.

[6] Véase el título de la primera obra en la que se habla por primera vez de categorías matemáticas: General Theory of Natural Equivalences. Saunders and McLane, 1945.

sobre todo externas)[7]. De hecho, ciertas categorías matemáticas, relacionadas de este modo, forman una categoría (de categorías), sin que su naturaleza sea algo esencialmente distinto de una categoría matemática "ordinaria", subrayando que lo importante son los objetos cualesquiera (a cualquier nivel) y sus relaciones.

5. Veamos un ejemplo simple: la contabilidad. Contabilidad es, según el diccionario de la RAE, la aptitud de las cosas para poder reducirlas a cuenta o cálculo (cont-abilidad) ¡Excelente definición! Nuestros académicos parecen haber captado intuitivamente lo que se pone de relieve en este ensayo. Desarrollar un modelo matemático de la física, por ejemplo, es "contabilizar" la física en algún sentido. Pero en la contabilidad propiamente dicha, utilizamos sólo la aritmética elemental, diríamos que contabilizar es matematizar haciendo intervenir solamente los números naturales ¿Qué quiere esto decir? Que cuando contabilizamos un almacén, una fortuna mobiliaria o una cantidad de dinero, estamos admitiendo que existen "objetos" (colecciones de piezas de almacén, de valores inmobiliarios, de unidades monetarias) **cuyas relaciones son** exactamente **las estudiadas por la aritmética** de los números naturales, por ejemplo que podemos sumar una tabla de doble entrada por filas o por columnas (propiedad asociativa de la adición). Para hacer ver que el fenómeno es el mismo en el fondo al matematizar la mecánica (digamos) habría que mostrar como los números que Aristóteles llamaba continuos (técnicamente hoy diríamos números reales) proceden de los naturales y, en última instancia de los objetos y morfismos de la teoría de las categorías matemáticas (la suma no es más que la relación entre dos elementos, los sumandos, y otro elemento, su suma). Más intuitivo sería utilizar la teoría clásica para hacer ver como los números proceden de ciertos entes (conjuntos) y de una relación (pertenencia).

6. **Síntesis histórica**. Este último ejemplo nos da pie para defender aquí a las ciencias positivas matematizadas, de la grave (e injusta) acusación de ser disciplinas que **se limitan a la medida** de ciertos

[7] Es interesante, en este sentido ver el título del capítulo 3 (pg.37) del libro de R. GOLDBLATT, Topoi, The Categorial Analysis of Logic, capítulo titulado "Arrows instead of Epsilon" en el lenguaje matemático, "arrows" indica relaciones, mientras que "épsilon" significa pertenencia a un conjunto.

fenómenos. Sintetizando el pensamiento de Stanley Jaki, por ejemplo[8], podríamos decir que las ciencias positivas, en general, se reducen al estudio de una de las categorías aristotélicas menos importantes: la cantidad (ποσόν). Contar o medir no es sino aplicar las relaciones entre objetos que definen (la magnitud y la unidad) de la categoría matemática correspondiente. Algo en sí mismo lejano a la medida o al hecho de contar, aunque el contar sea también estudiar ciertas relaciones (las trasformaciones naturales de los números). La posología (de ποσόν) es una ciencia médica, no matemática: ***el veneno está en la dosis*** o ***el medicamento está en la dosis*** según Hipócrates, (ambas palabras, veneno y medicamento, son traducción del mismo término griego). Dicha opinión errónea está bastante generalizada entre filósofos que no están excesivamente al día de la evolución de las matemáticas desde hace algo más de un siglo. En la escuela primaria, el presente autor se oyó decir que iba a estudiar ***matemáticas es decir aritmética y geometría***, que es lo mismo que decir estudiar la cantidad y la extensión. Desde la época clásica griega, esta descripción era la correcta hasta hace poco tiempo[9].

6.1. El primer gran autor que definitivamente formalizó una opinión del concepto de función matemática fue el suizo Leonhard Euler con su obra ***Introductio Analysin Infinitorum*** (1748). Para él, como para toda la matemática subsiguiente, el concepto de función resulta esencial. El genio de Basilea concibe este término como una relación entre un número de partida al que se le aplican unas ciertas operaciones matemáticas, que él llama analíticas, y un resultado final. Euler no ha hecho sino definir explícitamente lo que estaba en la mente de la mayoría de los matemáticos desde los tiempos de los griegos y quizá de los babilonios con sus tablillas de tierra cocida para facilitar los cálculos. Como veremos más abajo esta definición del concepto de función es sumamente limitadora. De hecho ya el mismo Euler en sus publicaciones da ejemplos de funciones que no tendrían cabida en el concepto por él definido (véase el punto 6.5).

[8] S. JAKI, *Means to Message*, A Treatise on Truth, pg. 18.
[9] Ver por ejemplo: Encyclopædia Britannica, edición de 1771.

6.2. Sin entrar en detalles técnicos, que caen fuera del ámbito de este pequeño trabajo, digamos que los problemas con la definición euleriana de función comenzaron con los estudios de Fourier de diversas cuestiones en 1807. Como ocurre normalmente en la historia de las matemáticas, los principios de la revolución, que convergería en la definición actual de función matemática, fueron poco rigurosos desde el punto de vista de la lógica formal. La posición utilizada por Jean Baptiste Fourier "funcionaba" en la práctica, aunque sus fundamentos teóricos no estaban nada claros.

6.3. A pesar de que el filósofo, teólogo y matemático Bernard Bolzano había previsto antes esta evolución (pero sin publicar nada), el paso definitivo fue dado por el matemático alemán Lejeune Dirichlet, que definió la función matemática de la manera siguiente: "*Una variable y es una función de otra variable x cuando a cada valor de x* ***corresponde*** *un valor definido de y*". Dirichlet habla pues de una correspondencia arbitraria, no necesariamente ligada a una fórmula ni a un método de cálculo. Cuando la correspondencia es de este último tipo (fórmula o algoritmo) la función se llama analítica, coincidiendo entonces con la definición dada por el genio de Basilea, Leonhard Euler.

Dirichlet abrió en su tiempo la caja de Pandora, y las furias matemáticas se extendieron por el mundo de esta ciencia. Muchos matemáticos de gran valía (Hermite y Poincaré entre otros) se escandalizaron por la nueva definición, aunque ésta termino imponiéndose y considerándose estándar hasta nuestros días.

6.4. A este punto, el lector podría preguntarse, de forma plenamente justificada, si las dos definiciones de relación matemática (que los matemáticos llaman funciones) de Euler y Dirichlet, no serían dos puntos de vista diferentes de una misma cosa. Este problema fue ya planteado (con una formulación diferente) por David Hilbert en su célebre lista de 23 problemas abiertos en la víspera de los albores del siglo XX, en el congreso internacional de matemáticas en la Sorbonne el 8 de agosto.

Veamos cómo se puede plantear la cuestión de forma diferente para una mejor comprensión de la misma. Decir que las correspondencias arbitrarias entre objetos corresponden a las correspondencias que se materializan en un algoritmo, un procedimiento de cálculo o una fórmula, equivale a decir que cualquier correspondencia arbitraria entre objetos es calculable, es decir, dada una de esas relaciones arbitrarias ¿existe un método de cálculo que nos lleve del objeto de partida a aquel con el que se relaciona?

Esta pregunta figuraba en la célebre lista de las cuestiones abiertas en matemáticas, formulada por el pensador alemán David Hilbert en 1900, como indicando cuales eran las tareas más importantes que había que resolver en el siglo XX. Esta pregunta fue tomada muy en serio por los matemáticos de la primera mitad del siglo XX y, en cierto modo, condicionó el desarrollo de esta ciencia en aquel periodo.

Varios pensadores dieron respuesta (negativa) a la pregunta formulada por David Hilbert. El primero, cronológicamente, fue Alonzo Church que creó un sistema de cálculo llamado el lambda-calculus, capaz de calcular todo lo calculable. Church demostró enseguida que ciertas relaciones entre objetos matemáticos no pueden ser calculadas usando el λ-calculus, es decir no pueden ser calculadas de ninguna manera[10].

El siguiente pensador (cronológicamente) que resolvió este problema negativamente, independientemente del primero fue Alan M. Turing, el creador del concepto de inteligencia artificial y de su definición precisa.

Turing ideó una máquina teórica (perfectamente inútil para la práctica) en una época en la que los ordenadores no existían aún, capaz de calcular **cualquier** correspondencia calculable entre objetos matemáticos, análogamente al λ-calculus. Turing demostró que al menos una de estas tareas era perfectamente imposible de calcular con una máquina de Turing. El planteamiento de Turing, mucho más comprensible y gráfico, más filosófico que matemático, es hoy día más popular que el planteamiento de λ-calculus de Church.

---

[10] Ésta es una formulación sencilla, ingenua, aunque correcta. Para un estudio serio de este tema véase: R. JEFFREY, *Formal Logic*: Its Scope And Limits. Hackett Pub Co; 4 edition (March 30, 2006).

Después de ellos una pequeña pléyade de autores ha desarrollado máquinas, sistemas de cálculo etc. Totalmente equivalentes al λ-calculus de Church y a las máquinas de Turing, con la ventaja de ser más simples, más pedagógicos y más fácilmente comprensibles. Citemos entre otros a los "ábacos" de George Boolos[11].

El fondo de la cuestión es el siguiente: todos los métodos de cálculo (algoritmos) posibles e imaginables, siendo infinitos en número, forman un infinito numerable, es decir, se los podría clasificar en una lista sencilla, sin dejarnos ninguno. Por el contrario, las correspondencias entre objetos matemáticos forman un conjunto de cardinalidad infinita con la potencia del continuo, son "muchas más". Es imposible hacer corresponder un algoritmo a cada correspondencia (véase el punto 12.1 para la explicación de estos términos).

Obsérvese que en estos casos hemos hablado de objetos matemáticos y no simplemente de números. La razón es que los sistemas estudiados (λ-calculus, máquinas de Turing, ábacos de Boolos etc.) pueden manejar números pero también otros objetos no numéricos, particularmente proposiciones lógicas. El desarrollo de este punto nos llevaría demasiado lejos.

6.5. De todas formas, la correspondencia de Dirichlet, aunque arbitraria, se consideraba una relación entre números. Pero este concepto empezó de nuevo a generalizarse. Bernhard Riemann estudió las correspondencias entre lo que se llama técnicamente números complejos, conjuntos de objetos matemáticos que tienen poco de números en el sentido ordinario del término, pues que se trata de conjuntos bidimensionales. De esta manera extendió el concepto, no con una nueva definición, sino con el campo de aplicación de la misma. A un cierto punto (1832) el jovencísimo Evariste Galois (murió poco después de hacer sus 21 años) empezaba a estudiar funciones (correspondencias) entre objetos matemáticos no numéricos (sustituciones, simetrías, etc.) con su **teoría de grupos,** bien que de una forma no demasiado rigurosa matemáticamente, una vez más. El tratamiento estrictamente riguroso desde el punto de vista

[11] Loc. cit. Últimos capítulos.

lógico y conceptual llegó en 1834 en una obra de Richard Dedekind[12]. De este modo se superó definitivamente el concepto euleriano de cálculo entre dos números por el de una correspondencia de cualquier tipo entre objetos matemáticos no necesariamente numéricos (véase el anexo 1). **La ciencia de la cantidad (ποσόν) se había irreversiblemente convertido en la ciencia de la relación (προσ τί).**

Hoy día, una rama importante de las matemáticas, la topología (no confundir con la topografía), estudia objetos y relaciones que no tienen nada de numéricas. Si objetos o relaciones topológicos pueden ser medidos o contados, la topología lo estudia haciendo abstracción explícita de estas características. Se considera universalmente el primer tratado de topología el artículo de Euler sobre los siete puentes de Königsberg y sus conexiones, continuidad etc.

7. Quien haya estudiado la aplicación la mencionada **teoría de grupos** a la química o a la física de partículas comprenderá enseguida de qué estamos hablando, en este caso, lo que se hace es estudiar las relaciones entre ciertas simetrías entre sí y al componerse entre ellas. Para que el lector no matemático pueda darse cuenta de algunos detalles véase la descripción de un ejemplo simple en el anexo 1. El tipo de afirmaciones que limitan el campo de la matemática (y de las ciencias matematizadas) a la posología, era quizá válido en los tiempos de la Grecia clásica y en la edad media. La razón profunda nos la da Wittgenstein cuando afirma que una dosis limitada de ejemplos produce profundas carencias conceptuales, análogamente a cuando una dieta monótona produce carencias de salud. Si los filósofos de la ciencia se obstinan en dar como ejemplos proposiciones del tipo 2 + 3 = 5, forzosamente se producirán las carencias conceptuales señaladas por el genio de Cambridge. No he encontrado aún ningún filósofo de la ciencia, de los que sostienen la teoría de la matemática posológica, que haya dado como ejemplo un espacio de Hilbert como objeto matemático, u otro de similar complejidad.

[12] R. DEDEKIND, *Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik.*

8. Este punto de vista nos da pie para plantear (y resolver) una dificultad cierta. Hemos visto que al matematizar una disciplina nos reducimos a considerar dos tipos de categorías: objetos y relaciones ¿Hasta qué punto podemos permitirnos el llamar sustancias a dichos objetos, a los objetos de las categorías matemáticas? Si, en el ejemplo visto, hemos hecho notar como, en el fondo, lo que llamamos operaciones entre números no son más que ciertas relaciones particulares, con ciertas propiedades. Según uno de los más reputados comentadores de Aristóteles, las categorías son los géneros supremos del ente[13] y es evidente que, después de todo lo dicho, matematizar una parte del mundo implica reducir los entes estudiados a esos dos géneros supremos: objetos y morfismos (relaciones). Se trata ahora de mostrar como los objetos matemáticos son en realidad sustancias. Para ello, investigaremos ese concepto de sustancia y veremos si puede aplicarse a los objetos puramente matemáticos, dentro del cuadro del modelo aristotélico del mundo, introduciendo, eso sí, las modificaciones necesarias para tener en cuenta las diferencias entre la matemática anterior a Dirichlet y la actual.

8.1 Una observación previa es, en este momento, importante: el concepto aristotélico de infinito (ser absolutamente ilimitado, acto puro) no coincide en absoluto con el concepto (o los conceptos, veremos luego) matemáticos del mismo término. A menudo se usa el decir que en el estagirita (y en su escuela) el término *infinito* es un concepto actual, mientras que el infinito matemático es un infinito potencial. Creemos sinceramente que este error proviene del ya citado régimen reducido de ejemplos que crean dificultades conceptuales. Concretamente: es cierto que el infinito de los números naturales (0, 1, 2, 3…) es un infinito potencial, pues que todos los números, por grandes que sean, son siempre finitos. Sin embargo, al considerar el conjunto (no el número) que contiene todos los números naturales, dicho conjunto es un infinito actual. Más simplemente: el conjunto continuo de todos los números reales entre cero y uno ($0 \leq x \leq 1$), cuya cardinalidad infinita coincide con la del conjunto de puntos de un segmento finito cualquiera, es

[13] F. BRENTANO, *Sobre los múltiples significados del ente según Aristóteles*, capítulo 5º.

también un infinito actual en una distancia finita, como ya indicara Platón en el Parménides al dar la solución de la paradoja de Zenón, solución por cierto recogida por Aristóteles. El primero de estos infinitos se llama infinito numerable y su cardinalidad se denota con $\prod_0$ (alef sub cero), el segundo, el infinito continuo tiene una cardinalidad mayor como ya demostrara Cantor con su célebre argumento diagonal[14]. El infinito matemático se predica solamente de la cardinalidad de un conjunto: siendo Dios Uno, no puede decirse que Él sea infinito desde el punto de vista matemático. Y no se diga que de nuevo estamos cayendo en la matemática del contar. La definición del conjunto infinito es: *aquel en el que se puede poner en* ***relación*** *de uno a uno el todo con una parte del conjunto*[15].

8.2 Volviendo a nuestro problema de cómo los objetos matemáticos son substancias, diremos en primer lugar, para no extendernos de forma excesiva, (quizá de manera abusiva por su simplismo) que para Platón el concepto de sustancia se identifica con el concepto de forma, algo rechazado enérgicamente por Aristóteles el cual hace notar que la sustancia se da siempre en lo individual y que las formas platónicas son en el fondo *universales*. Volveremos sobre este tema para resolverlo (punto 8.5).

8.3 La filósofa inglesa, GEM Anscombe ha puesto de relieve como ciertos conceptos metafísicos están definidos de una forma imprecisa y a veces contradictoria en las obras de Aristóteles[16], por lo que nos referiremos más bien al concepto estudiado por Sto. Tomás que Anscombe pone como prototipo de precisión y coherencia en los conceptos aristotélicos. Pero aún reconociendo la validez, y sobre todo la coherencia, de los conceptos aristotélicos en Sto. Tomás, hemos de reconocer, hablando de metafísica de las matemáticas, que sus conceptos

---

[14] Über die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actualunendlichen Zahlen (1887).

[15] Dedekind 1888.

[16] G.E.M. (GEM) ANSCOMBE habla también del concepto de forma definido diferentemente por el Estagirita según la obra de que se trate. Otro ejemplo: el concepto aristotélico de sustancia en Categorías es algo diferente del mismo concepto en Metafísica, quizá por la influencia platónica de la que se liberó Aristóteles gradualmente. Intention, Harvard University Press, 2nd. edition.

estaban ciertamente limitados por el contenido de la matemática de su tiempo, como hemos visto en la parte histórica (punto 10). Repasaremos pues los conceptos del genio de Aquino revisando lo que sea necesario para que tengan cabida en su sistema las realidades matemáticas de hoy en día (ya Anthony Kenny, figura clave del tomismo analítico, demostró como las cinco vías del *Doctor Communis* de la Iglesia están influenciadas por la ciencia de la época)[17].

8.4 Empecemos pues por la obra de juventud (1252) del doctor angélico, que mejor puede orientarnos sobre el tema: In Boethii de Trinitate[18]. Como es sabido, el Doctor Angelicus divide exhaustivamente, según él, las ciencias especulativas en tres grupos según su objeto de estudio. En el segundo grupo, nos dice el Aquinate, se encuentran las ciencias que tienen como objeto entes que dependen de la materia y del movimiento en su ser, pero no en su modo de ser comprendidos, y aquí el genio de Aquino incluye las ciencias matemáticas. Ya hemos visto que en su tiempo (e incluso cinco siglos más tarde) tal era la posición comúnmente aceptada dada la naturaleza de estas ciencias. Hoy, sin embargo, no podemos decir lo mismo. Es conocida la anécdota de un estudiante de estadística que muestra a un amigo, no versado en esta ciencia, la fórmula de la campana de Gauss en teoría de probabilidades. El amigo pregunta: "*¿Qué es esa letra griega?*" y el matemático responde "*¿No sabes lo que es π? 3.141592…*" A lo que el amigo responde "*Y ¿Qué tiene que ver la razón de la circunferencia al diámetro con los cálculos de probabilidad normal?*"[19]. Es evidente que para el no matemático, π es una cantidad, la longitud de una circunferencia de diámetro unitario; pero π es un objeto matemático más general, lo que se llama técnicamente un número trascendente. Ni su esencia ni su existencia están basadas ni en la materia ni en el movimiento; no pertenece, en este sentido, a los objetos que el Doctor Angélico clasifica

[17] A. KENNY, *Five Ways*, St. Thomas Aquinas. Routledge.

[18] Para un estudio exhaustivo de este tema, véase La División de las Ciencias Especulativas en Santo Tomás de Aquino del Prof. Rafael Pascual, L.C. (2003).

[19] E. WIGENER, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, 1960 (Clase impartida en NY 11 de Mayo de 1959).

como grupo segundo (entes ligados a la materia y al movimiento en su existencia, pero no a su comprensión), por eso aparece como punto clave en múltiples campos de la matemática. Más bien parece que deberían pertenecer a los objetos que el Aquinate clasifica como grupo tercero: ni su existencia ni su comprensión dependen de la materia ni del tiempo. Sin embargo es evidente que para Sto. Tomás los objetos de las ciencias de este tipo no son en absoluto ni remotamente parecidos a los objetos matemáticos estudiados hoy ¿Cómo clasificarlos pues? (problema planteado en el punto 8.2 al hablar de las formas platónicas)

8.5 Para Sto. Tomás existe una diferenciación ulterior de los objetos de las ciencias especulativas de tipo tres: los objetos positivamente inmateriales y los inmateriales neutros en los que se encuentra aún una cierta relación con la materia y el movimiento: el hombre (en general, es decir lo humano) etc. Es en este apartado donde creo que se deben clasificar los objetos matemáticos.

8.6 Pero surge la misma dificultad que con las formas platónicas. Para los tomistas sólo cabe en este apartado el *ens commune*, que según el Aquinate no es substancia porque dicho concepto se encuentra siempre en el individuo (véase el punto 12.2). Creemos sin embargo que en esta clasificación falta una subclase de entes que siendo neutralmente inmateriales no son universales sino individuales: los entes matemáticos, cosa que el genio de Aquino no podía imaginar, dado el estado de las ciencias matemáticas en su tiempo. Me explico:

8,7 Tomemos un tratado cualquiera de matemáticas que no sea meramente divulgativo o elemental. La introducción de un nuevo ente matemático se hace de una manera precisa: por su definición rigurosa, cosa que coincide con gran precisión con lo que el tomismo llama *la esencia*. Esta esencia es en *la escuela* el origen de la individuación de las sustancias inmateriales, pues Sto. Tomás demostró que el hilemorfismo universal (defendido por ejemplo por S. Buenaventura que, según Sto. Tomás lo había tomado de Avicebrón) es falso. Las sustancias inmateriales están limitadas en su existencia por su esencia, no por una especie de materia como defendía Avicebrón (Ibn Gabirol). En el tratado de matemáticas a que nos estamos refiriendo, encontramos inmediatamente -después de la definición- el teorema de existencia y unicidad, lo cual coincide, una vez más, con la concepción tomista. El ente así enunciado es pues una verdadera sustancia, inmaterial neutra, pero perfectamente individual, con una esencia perfectamente definida y una unicidad probada. No se trata pues de un universal como los descritos por Sto. Tomás al hablar de los objetos de las ciencias especulativas de tipo tres, neutralmente inmateriales.

8.8 En otro tratado de juventud de Sto. Tomás, *de Ente et Essentia*, encontramos en su capítulo IV un estudio en el que habría podido inserirse, si el Aquinate hubiese conocido las matemáticas actuales[20], la solución del problema que nos ocupa. Las dificultades conceptuales que el Aquinate resuelve brillantemente a propósito del conflicto entre naturaleza en general y hombre particular debido a la exigencia de que la substancia sea siempre particular y que los entes abstractos del tipo II sean generales. Si se admite, como lo hacemos que puedan existir substancias particulares del tipo II, como lo son entes matemáticos, la dificultad se resuelve por sí sola. Un bonito ejemplo nos lo da Sto. Tomás mismo cuando habla de una estatua que representaría a todos los hombres:

"…si esset una statua corporalis rapræsentans multos homines, constat quod illa imago vel specie statuæ haberet esse singulare et proprium secundum quod refertur ad res ut similitudo rerum, sicut etiam, si esset una statua corporalis repræsentans multos homines, constat quod illa imago vel species statua haberet ese singulare et proprium secundum quod esset commune represæntativum plurium".

Si se sustituye el concepto de materia (*corporalis*) por la palabra esencia, diríamos que Sto. Tomás está describiendo un objeto matemático. Por ejemplo el espacio de Banach representa todos los posibles espacios de este tipo que pueden serlo con particularizaciones (número de dimensiones, por ejemplo, que puede ser infinito). Pero su existencia está limitada no por

[20] Es bien conocida la continuidad en el pensamiento de Sto. Tomás a lo largo de su vida, caso infrecuente entre filósofos aún de primera fila. No es pues de extrañarse que aludamos a estas dos obras de juventud: in Boethii de Trinitate y de Ente et Essentia.

su materia sino por su esencia y cada uno de ellos es individual, no general, no *ens commune*.

8.9 Y, finalmente, tenemos el criterio a mi entender supremo: los objetos matemáticos no se predican de otras substancias pero de ellos se predica un solo accidente: la relación. Un círculo abstracto en matemáticas no es grande ni pequeño, ni rojo ni verde, pero puede ser un círculo circunscrito **a** un triángulo o un círculo **osculador a** una curva[21]. Parafraseando a Sto. Tomás, un pozo puede ser *circular*, pero no es *el círculo,* del mismo modo que Sócrates es *humano* pero no *el hombre.*

9 Sicológicamente, la práctica totalidad de los matemáticos se comporta dando por sentado (no siempre explícita y conscientemente) que estos objetos y estas relaciones existen realmente; es lo que se conoce con el nombre de **realismo** matemático[22]. En la práctica totalidad, los matemáticos se comportan de este modo y solo algunos de ellos lo reconocen explícita y conscientemente (*Kurt Gödel*, *Bertrand Russell* por ejemplo). Cuando se persigue una propiedad de una estructura matemática, una demostración u otro elemento matemático, dicho objeto no se encuentra (aún) en la mente de nadie, y sin embargo se conocen algunas de sus propiedades; su existencia es, pues, independiente de nuestras mentes (**realismo**, en este caso que conduce a algunos al **platonismo** matemático, como a *Kurt Gödel*, diferente del platonismo general, a otros al realismo aristotélico como a *Bertrand Russell*). Una vez encontrado el objeto buscado, a veces por varios matemáticos siguiendo diferentes vías, el objeto es el mismo, otra razón para afirmar que su existencia es independiente de nuestro espíritu. Este excursus está justificado porque se habrá ya intuido el como la teoría de las categorías matemáticas es algo así como la matematización de la matemática, un grado de abstracción ulterior e unificante del álgebra, la geometría y demás ciencias exactas. Este subir un escalón puede recordar al lector crítico el problema del **tercer hombre** de Aristóteles ya esbozado en el Parménides de Platón. Al considerar las “formas” matemáticas como existentes, como independientes de

[21] Un circulo se dice osculador a una curva cuando, tangente a la curva, posee un radio igual al radio de curvatura de dicha curva en el punto de tangencia.

[22] Existe también un realismo aristotélico en matemáticas, mucho menos extendido.

nuestra mente, considerándolas al mismo nivel de la disciplina matematizada, no hay necesidad de una “tercera teoría” ni de un regreso al infinito. Para un matemático (que lo admita o no) no hay distinción substancial entre una forma **ante rem** (categoría matemática) y una forma **in re** (disciplina matemática concreta o aplicación matemática).

9.1 Examinemos primeramente la posición conocida como **realismo aristotélico**, la menos frecuente entre los matemáticos. Esta posición recurre a conceptos casi literalmente escolásticos y está ligada, como veremos enseguida, a una visión de las matemáticas como ciencia de la cantidad. Como consecuencia, la discusión previa cantidad – relación se refleja fielmente en las concepciones aristotelismo (cantidad) – platonismo (relación).

El concepto de base es que las matemáticas estudian aspectos (número, medida) que se encuentran en la naturaleza, aunque el matemático, abstrayendo otros accidentes, estudia sólo la cantidad discreta (números de la aritmética) o la medida (números no necesariamente enteros de la geometría). Los partidarios actuales de este punto de vista, recogen la visión de Aristóteles según la cual el matemático estudia el mismo objeto material, por ejemplo, que el físico (entendiendo la física según el concepto de la época como estudio de la naturaleza, hoy diríamos física, biología, etc.) pero no bajo el mismo aspecto (no estudian el mismo objeto formal).[23]

Esta posición filosófica crea ciertamente dificultades a un matemático desde el principio del s. XIX. Por ejemplo, Bertrand Russell, noto realista, llega a decir, impulsado por su posición realista. “*Mathematics can be defined as the subject where we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true or false*”[24]. Evidentemente, en una posición realista, un texto puramente matemático no tiene en cuenta “de qué estamos hablando” (in rem) ni sabemos si lo que decimos será verdad en el dominio al cual se aplicará (sociología, físi-

[23] Aristóteles Física, II-2 193 a36-b36.

[24] B. RUSSELL, Collected Papers 1901 – 1993 vol.3, 336.

ca, biología…) porque eso depende de la aplicación que se dé a la teoría matemática estudiada.

Mayores dificultades todavía se dan en el caso en que pensamos en que no es imposible que nuestras afirmaciones matemáticas no puedan ser aplicadas en ningún campo de lo que los griegos llamaban "física" (estudio de la φύσισ), o, peor aún, cuando sabemos con certeza que nuestras afirmaciones matemáticas son, por su naturaleza misma, imposibles de aplicar a ningún estudio de la naturaleza. Bertrand Russell decía que, en caso de conocerse el número máximo de objetos del universo (?), no se podría hablar de números mayores que él. En el congreso de una asociación internacional de Teoría de los números (término técnico para hablar de aritmética, de números enteros) se solía hacer un brindis en el banquete final "*Por que nuestra ciencia no tenga jamás una aplicación práctica*". Desgraciadamente (desde este punto de vista) tales teorías se utilizan hoy para la codificación secreta de los datos esenciales que se transmiten por internet (números de tarjetas de crédito, secretos militares, etc.). Y nótese que estos "números" se manipulan como mensajes y no como correspondiendo a ninguna cantidad en la naturaleza.

Hemos escrito más arriba como la estructura (conjunto de relaciones) es esencial en el campo matemático. Nada impediría a los estructuralistas de participar en la posición del realismo aristotélico, considerando que las relaciones, la estructura también se darían "in re"; sin embargo, todos los estructuralistas convencidos, según nuestro conocimiento, son partidarios del platonismo matemático (ver punto siguiente 13.2). Personalmente pensamos que en nuestra sociedad materialista existe una dificultad de principio de poder considerar objetos reales no materiales. Para el gran público (y extrañamente para algunos filósofos de la matemática) el término "real" es sinónimo del término "material", aunque tan real es la relación de paternidad o de filiación como el padre o el hijo mismos. Hablaremos más abajo de otras consecuencias de esta dificultad cultural.

La dificultad principal del realismo aristotélico-matemático sería su manera de interpretar los conceptos más abstractos y complejos, como discutimos a propósito de la distinción del objeto formal de las matemáticas (cantidad relación). Sin ir tan lejos, la posición aristotélica implica que las afirmaciones matemáticas son verdades necesarias referidas a un mundo contingente. Por ejemplo, la afirmación 3 + 2 = 5 interpretada realísticamente, quiere decir que si ponemos en un cesto tres objetos cualesquiera y luego añadimos dos, dentro de la cesta se encuentran cinco objetos. Siendo '3 + 2 = 5' una afirmación necesaria ¿cómo es posible que se predique de un mundo contingente? La contingencia, responden los realistas, está dada por la aplicación. Esos "objetos cualesquiera", de los que hemos hablado más arriba, han de ser objetos únicos, permanentes, no aglutinantes etc. Por ejemplo si los "objetos cualesquiera" son bolitas de vidrio, nuestra relación matemática tiene todos los visos de cumplirse; mientras que si se trata de gotas agua no, porque el agua puede evaporarse, las gotas pueden fusionarse entre ellas, etc. Ello lleva a decir a A. Einstein, contrario a la interpretación realista "*As far as mathematics refer to reality, they are not certain. As far as they are certain, they do not refer to reality*"[25]. Y en consecuencia, ello le lleva a decir que "*Mathematics as such cannot predict anything about real objects*". Esta objeción lleva a algunos a caer en un puro nominalismo.

Nótese como la polémica entre realismo aristotélico y platonismo matemático se asemeja a la polémica medieval sobre los universales.

9.2 Echaremos ahora un vistazo al llamado platonismo matemático.

Vaya por delante lo que el platonismo matemático NO es. El llamado platonismo matemático no es la aceptación de las formas platónicas en el mundo de las ideas tal y como Platón lo expone en La República aplicadas a las matemáticas, aunque naturalmente, tiene bastante que ver con esta posición metafísica.

Los partidarios del platonismo matemático son aquellos que piensan de la siguiente manera:

[25] A. EINSTEIN, *Ideas and Opininions*, New York 1954, 233.

"*Las matemáticas estudian objetos* ***abstractos*** *que existen independientemente de los matemáticos, de su lenguaje, e independientes del tiempo, el espacio o la materia*"[26].

La razón fundacional, por así decirlo, del platonismo matemático se encuentra en Gottlob Frege: "*Las afirmaciones matemáticas sobre entes abstractos (matemáticos) son a menudo verdad, pero ¿cómo podrían ser verdad si los entes a los que se refieren no existieran?*"[27].

Un concepto, un término que es necesario especificar por ser específico del platonismo matemático es el de "***abstracto***" empleado por primer en la historia de la filosofía en el sentido ontológico que vamos a explicitar.

Históricamente, las matemáticas griegas pretendían describir el mundo (realismo aristotélico, ver punto 13.1), por ejemplo, Euclides pensaba describir el espacio físico en su geometría, usando para ello términos y conceptos abstractos mentales. En el medioevo se usó profusamente este término, pero siempre hablando de conceptos abstractos (ens intentionale), no de objetos (ens naturale), es decir, se estudia profusamente la epistemología de lo abstracto (explicándola con un proceso que este autor considera válido aún hoy día) pero no la ontología de lo abstracto. Posteriormente, con Descartes la cosas empeoran en este sentido porque todo se vuelve intencional, incluido el criterio mismo de verdad constituido por las "*ideas claras y distintas*". Finalmente, con Kant llegamos al exceso de pensar que las verdades matemáticas son sintéticas a priori, encontradas por una misteriosa facultad humana, que él llama "*estética trascendente*". Con el desarrollo de las matemáticas en el s. XIX, y sobre todo, con el desarrollo de los fundamentos de esta ciencia, se demuestra finalmente que las verdades matemáticas son siempre analíticas y, por ende, necesarias.

En efecto, dada una definición adecuada del concepto de "número" como algo definido por sus relaciones con otros

---

[26] C. MCLARTY *Mathematical platonism vs… Philosophia Mathematica* (III) Vol. 13 no. 2 Oxford University press.

[27] G. FREGE, 1953, *Foundations of arithmetic,* Oxford, Blackwell. Traducido por J. L. Austin.

números[28], principalmente la relación de “sucesión”, que es lo que más los caracteriza, y definida la relación “suma” entre dos números (sumandos) y un tercero (suma)[29] se puede llegar a demostrar que, coherentemente con las definiciones, 2 + 3 = 5 es una verdad necesaria. Lo mismo para cualquier otra afirmación aritmética, aditiva o multiplicativa.

Ante este estado de cosas en los que las soluciones medievales y modernas no resultaban satisfactorias para las nuevas matemáticas, se alza la voz de Gottlob Frege, el primer filósofo (también matemático y lógico) que con una mirada inquisitiva acertó a ver el núcleo del problema: el psicologismo. Sin entrar en consideraciones que nos llevarían lejos de nuestro tema, Frege (y luego Husserl) llamaron psicologismo a la posición filosófica consistente en reducir lo abstracto a algo intelectivo, estudiando como hemos visto más arriba, los procesos gnoseológicos pero no la ontología de lo abstracto.

Ingeniosamente, Frege empieza atacando el psicologismo, no por sus entes de razón, sino por sus leyes. Divide las leyes en dos tipos: leyes descriptivas (de la realidad) y leyes prescriptivas (como las leyes morales o las leyes del bien pensar). Explica luego como una ley descriptiva (“no se puede salir con la puerta cerrada”) puede convertirse en prescriptiva (“no intentes salir con la puerta cerrada”) y demuestra que la lógica con sus leyes prescriptivas, “del buen pensar”, no son sino el reflejo prescriptivo de unas leyes descriptivas.

En efecto, como dice Popper, la realidad es testaruda y nosotros podemos afirmar de ella lo que queramos, pero si afirmamos cosas que no son reflejo de la realidad, de una forma o de otra nos daremos con la puerta en las narices.

Y es aquí donde interviene la famosa pregunta citada más arriba ¿Cómo es posible que algunas de nuestras conclusiones matemáticas o lógicas sean verdades objetivas si los entes a los que ellas se refieren no existen objetivamente?”.

“Lo abstracto” puede ser intelectual, pero ello es una imagen de una realidad óntica. Los números, sus leyes, los conjuntos y

---

[28] G. PEANO,1889. Arithmetices principia, novo methodo exposita.

[29] sucesor (a + b) = sucesor (a) + b = a + sucesor(b).

demás entes de la matemática y de la lógica existen en su mundo, que Frege llama el "dominio 3"[30] y que no hay que confundir con el mundo III de Popper, aunque alguna similitud existe. Es más, ayuda a aclarar los conceptos el poner frente a frente el "dominio 3" de Frege con el "mundo III" de "Popper". Para Popper el mundo III es un conjunto de conocimientos objetivos (a veces sin un conocedor), que tuvo un principio en el tiempo, por ejemplo, el Libro de los Muertos del antiguo Egipto, es un cuerpo de doctrina, conceptos, himnos etc. que, después del edicto de Milán y antes de que Young y Champollion descifraran los jeroglíficos, no existía en ninguna mente, era verdaderamente un conocimiento objetivo, independiente de la mente de seres humanos. Para Frege, sin embargo, su "Dritte Bereich" está fuera del tiempo, del espacio, es un dominio eterno, independientemente de la actividad del ser humano e incluso de ningún otro ser inteligente, característica que no comparte con el mundo III de Popper. Preguntar dónde se encuentra la función (correspondencia) "seno hiperbólico" es una pregunta sin sentido, y si quiere uno prestarle un sentido, se respondería que no está en ninguna parte. S. Agustín respondería quizá que están y han estado siempre en la mente de Dios. Este campo o dominio (Reich, Bereich) de Frege es pues verdaderamente platónico. Pero está claro que el razonamiento que nos lleva a su existencia no es aplicable fuera del campo de las matemáticas y en consecuencia no es identificable con el platonismo genuino de Platón, por ser más restringido.

Como dijimos más arriba, existe a juicio del presente autor, una resistencia a aceptar la existencia real de entes inmateriales en nuestra cultura materialista. Esta resistencia se ha cristalizado en la objeción más frecuente que se plantea al platonismo matemático, la dificultad epistémica de Benacerraf[31]. El autor norafricano está convencido de que entes inmateriales, fuera del espacio y del tiempo y de la mente, son incapaces de

[30] "Dritte Reich", dice Frege, "Bereich der Realität".

[31] P. BENACERRAF, "*Mathematical Truth*" Journal of Philosophy. 70, (19) 661-679. 1973.

ser causa de ninguna acción (ineficiencia causal), y por consiguiente de ninguna percepción, sobre todo en el hombre, ser material ligado al espacio y al tiempo. Sin embargo, añade Benacerraf, el conocimiento matemático existe por parte del hombre, luego no existen tales realidades matemáticas fuera del espacio, el tiempo, la mente y la materia.

Por supuesto, esta dificultad es real aunque no imposible de superar. Kurt Gödel, un noto platonista matemático, hace alusión a esta dificultad cuando describe esta posición filosófica de la siguiente manera:

El platonismo [matemático] concibe las matemáticas como la descripción de una realidad no-sensible, que existe independientemente de las acciones y las disposiciones de la mente humana y que es percibida, y probablemente percibida imperfectamente, por la mente humana[32].

La respuesta más común (y la más veces citada) a esta objeción es el llamado "Argumento de indispensabilidad" de W. V. Quine y H. Putnam[33]. Según estos autores, los grandes descubrimientos de la física (los electrones, los agujeros negros…) proceden de nuestra adhesión óntica al hecho de que sin ellos no podrían existir nuestras mejores teorías de la realidad. Sin embargo, esta adhesión óntica (*ontic commitment*) no se produce en el caso de los entes matemáticos, tan necesarios como los físicos para conformar nuestras teorías. Según estos autores, y ello parece absolutamente razonable, hay que admitir en nuestras posiciones filosóficas, procede dar nuestra conformidad óntica, a dichos entes fuera del espacio y de la mente. En otras palabras, deberíamos creer que existen si queremos ser coherentes.

Una consecuencia del platonismo matemático, es el llamado "*optimismo de Hilbert*". Como es sabido, David Hilbert, en su programa de problemas no resueltos de 1900, pidió que alguien demostrara que todo problema matemático bien formulado tuviera una solución afirmativa o negativa. Kurt Gödel,

---

[32] K GÖDEL, *Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics*. Collected Works, Oxford University Press, vol III, 323, 1995. La traducción es mía.

[33] Q. WILLARD VAN ORMAN, *Things and their Place in Theories, and Things*, Cambridge MA, Harvard University Press, 1-23, 1981.

ya citado, descubrió en 1931 que existen problemas bien planteados de los que no se puede demostrar ni su solución afirmativa ni negativa, son proposiciones indecidibles. Pues bien, el mismo Gödel pensaba que en la realidad matemática *esos problemas tenían siempre solución*, aunque su propio trabajo demostraba que era imposible demostrarla. Tal posición se denomina optimismo de Hilbert[34].
Terminemos diciendo que en la práctica, incluso los matemáticos que no se plantean problemas filosóficos, todos ellos tienden a pensar, a hablar y a comportarse como si el platonismo matemático fuera una verdad incontestable[35].

10. Una conclusión que el presente autor deduce de todo ello es que no existe un **grado de abstracción máximo**, como pretenden algunas escuelas. La historia de las matemáticas nos muestra, en efecto, que los matemáticos de las distintas épocas han procedido por grados de abstracción sucesivos a partir de los objetos abstraídos por una generación anterior. Esta sucesión de abstracciones parece no tener más límite que la capacidad del intelecto humano, es decir la capacidad de manipulación de objetos cada vez más abstractos que alcanza casi ya el límite práctico de los estudiantes de matemática y sin duda el de algunos profesores. En la misma teoría de las categorías matemáticas encontramos una categoría, que los matemáticos llaman **Cat**, formada por todas las categorías posible en tanto que objetos de **Cat**. No podemos estar seguros de que, siguiendo esta vía, la generación sucesiva pueda abstraer nuevos objetos a partir de las categorías matemáticas mismas.

[34] R. TIESZEN, *After Gödel*, Platonism and Rationalism in Mathematics, Oxford University Press, 2011.
[35] M. BALAGUER: *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics,* Oxford Unversity Press, 1996.

Máximo en ABC

11. **Otras conclusiones**. Hemos visto como el punto de partida del estudio es la consideración de la presencia de objetos y relaciones entre los mismos. El estudio de estas dos categorías aristotélicas (ουσία, προσ τί) es suficiente para definir las categorías matemáticas y, con ello, para fundar completamente la aritmética y a continuación todas las disciplinas matemáticas. Por consiguiente, matematizar una ciencia (la física, la informática o la sociología, por ejemplo) consiste de hecho en estudiar la reducción del objeto material de dicha ciencia matematizada a sólo dos categorías aristotélicas: ουσία y προσ τί.

23 de Agosto del 2010. La Tour-de-Peilz, Suiza
revisado el 18 de Septiembre de 2013

Julio Moreno-Dávila.
Profesor invitado
Universidad Pontificia Regina Apostolorum, Roma.

Anexo 1. El Viertelgruppe o grupo de Klein

Para ilustrar el concepto de objeto abstracto, hemos incluido las figuras 1 y 2 que son “realizaciones concretas” de un grupo de Galois particular, el Viertelgruppe de Felix Klein (1884). Se podrá argüir que las dichas “realizaciones concretas” son igualmente objetos abstractos, para la solución de este escolio, véase el punto n).

En la figura 1 hemos querido representar cuatro transformaciones de figuras planas: una simetría axial horizontal “**h**”, una simetría axial vertical “**v**”, una simetría central “**c**”, y la “transformación” idéntica “**i**”, que deja invariadas las figuras planas. Si estudiamos, como ejemplo, las transformaciones sufridas por el triángulo T, nos encontramos que al aplicar la transformación **v**, T se transforma en T’ y si a este triángulo aplicamos la transformación **c**, obtenemos T’’ etc. Se observa como el efecto de efectuar sucesivamente las transformaciones h y v equivale a aplicar la transformación c. Expresamos este hecho con la relación:

c = h v

De la misma forma podríamos haber escrito : c = v h, v = c h etc. la tabla completa de las combinaciones de estas transformaciones es:

	i	v	h	c
i	i	v	h	c
v	v	i	c	h
h	h	c	i	v
c	c	h	v	i

Dadas ciertas propiedades de esta tabla, el conjunto de **objetos** (transformaciones) dotado de las **relaciones** incluidas en la tabla, constituyen un grupo de Galois particular llamado Viertelgruppe o Grupo de Klein.

En la figura 2 hemos representado dos monedas que pueden mostrar la cara o la cruz. Si llamamos **“v”** a la transformación correspondiente a volver la moneda de la izquierda, **“h”** a dar la vuelta a la de la izquierda, **“c”** a darle la vuelta a las dos e **“i”** a dejar las monedas sin cambiar, el efecto de combinar dos transformaciones de estas cuatro se obtiene de la misma manera que antes. Por ejemplo, si se da la vuelta a la moneda de la izquierda ("**v**") y se sigue dando la vuelta a las dos monedas ("**c**") el resultado obtenido será equivalente a dar la vuelta a la moneda de la derecha ("**h**"), es decir:

$$\mathbf{c = h\ v}$$

Y el conjunto de combinaciones de dos operaciones se describe en la misma tabla. Volvemos a encontrar, en una representación totalmente diferente, el mismo objeto abstracto que hemos llamado grupo de Klein.

Es decir que el Viertelgruppe es una abstracción creada a partir de objetos y de ciertas relaciones, lo que le da una relevancia universal. Jean Piaget da una importancia extrema al descubrimiento de esta estructura a los 10 – 12 años (intuitivamente, no formalmente, como es natural) en el desarrollo de la inteligencia infantil o, por usar su terminología, en la psicogénesis del individuo[36].

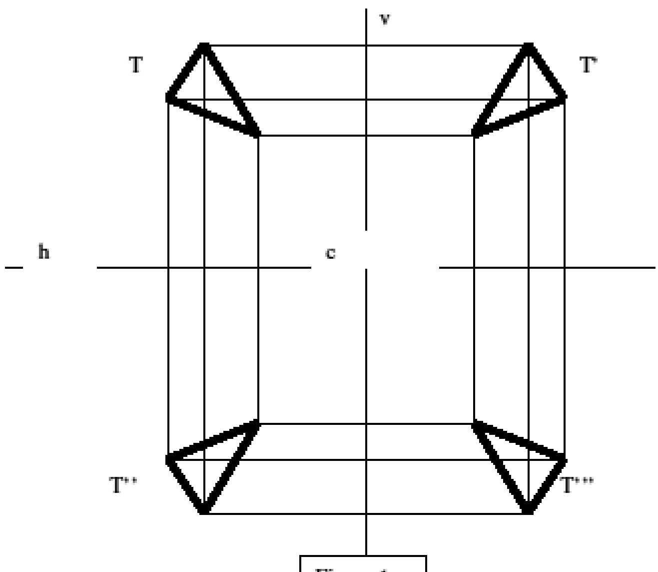

Figura 1

[36] J. PIAGET: *L'Epistmologie Génétique*, Capítulo 5, 55, Presses Universitaires de France. J. PIAGET, *profundo conocedor de la teoría de las categorías matemáticas*, las ha aplicado con buenos resultados al desarrollo epistemológico del ser humano.

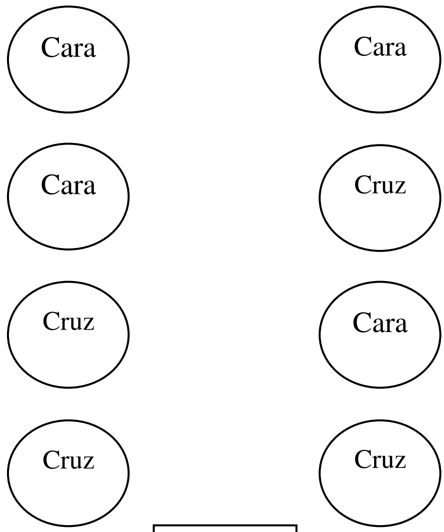

Figura 2

Anexo 2. El "Tercer Hombre" de Aristóteles.

Se conoce con este nombre una dificultad de la teoría de las formas platónicas, ya mencionada en el Parménides[37] y desarrollada por Aristóteles[38]. Según esta dificultad, si lo común a las formas reales de los hombres es la forma pura "hombre", se necesitaría un tercer hombre para explicar lo común a las formas reales y la forma pura y así indefinidamente. Hemos ya visto en el párrafo "m" la solución de esta dificultad. En la fundamentación de la matemática antes de la llegada de la teoría de las categorías de Saunders y McLane, la fundamentación con el concepto de conjunto llevaba a las conocidas paradojas de Bertrand Russell. Así, dicha fundamentación debía distinguir entre conjuntos de objetos y conjuntos de conjuntos etc., lo que no es sino un redescubrimiento del problema del tercer hombre por parte del filósofo de Cambridge. Este regreso al infinito se hace innecesario con la teoría de las categorías: ya hemos visto como la categoría matemática **Cat** es una categoría de categorías exactamente con las mismas propiedades y el mismo tratamiento que otra categoría cualquiera.

[37] PLATÓN, *Parménides*, 132 a-b

[38] ARISTÓTELES, *Metafísica*, 990b17 = 1079a13, 1039a2; Refutaciones Sofísticas 178b36 y siguientes.

Summary: This essay defends the thesis that mathematics reduces the number of Aristotelian categories to two: substance and relation. This leads the author to defend mathematics against what, for him, is the unjust accusation that it is the science of one of the less important Aristotelian categories: quantity. To apply mathematics to some particular area is to study the aforementioned categories, essence and relation, within that area.

Sommario: Questo piccolo lavoro propone la tesi secondo cui la matematica riduce le dieci categorie aristoteliche a due soltanto: sostanza y relazione. Inoltre, l'autore difende questa disciplina dall'accusa (ingiusta secondo lui) di occuparsi soltanto della quantità, una delle meno importanti categorie aristoteliche dell'essere. Applicare la matematica a qualche area particolare sarebbe invece studiare le categorie di cui sopra, l'essenza e la relazione, all'interno di tale area.

Key Words: mathematics, essence, relation, quantity, Aristotelian categories.

Parole chiave: matematica, sostanza, relazione, quantità, categorie aristoteliche.